

Chapitre 6

DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

Définition 11

Soit n un élément de $\mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$), On appelle développement limitée de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre n , s'il existe :

- un polynôme P de degré au plus n
- une fonction R telle que $\lim_{x \rightarrow 0} R(x) = 0$

Au voisinage de 0 : $f(x) = P(x) + R(x)$

$P(x)$ est appelé partie principale ou partie régulière de f .

$R(x)$ est appelé le reste ou terme complémentaire.

$DL_n(0)$ = Développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + R(x)$$

* $R(x) = x^n \epsilon(x)$ où $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

$DL_n(0) : f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (sont des réels)

Remarque 17

★ Pour déterminer le $DL_n(x_0)$: on pose $X = x - x_0$

— $DL_n(0)$ pour la variable X : $f(x) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n + 0(X^n)$

— $DL_n(x_0)$ pour la variable x : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + 0((x - x_0)^n)$

★ Pour déterminer le $DL_n(\infty)$: On pose $X = \frac{1}{x}$

— $DL_n(0)$ pour la variable X : $f(x) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n + 0(X^n)$

— $DL_n(\infty)$ pour la variable x : $f(x) = a_0 + a_1\frac{1}{x} + a_2(\frac{1}{x})^2 + \dots + a_n(\frac{1}{x})^n + 0((\frac{1}{x})^n)$

6.1 Développement limité de Taylor-Young

$$DL_n(0) : f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + 0(x^n).$$

Déterminons le $DL_3(0)$ pour la fonction $f(x) = \exp(x)$

$$DL_3(0) : f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = \exp(x) \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \exp(x) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \exp(x) \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$f^{(3)}(x) = \exp(x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = 1$$

Ce qui donne $DL_3(0) : \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

En procédant de la même façon, on trouve :

$$DL_3(0) : g(x) = \ln(1+x) \Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$DL_3(0) : h(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

6.2 Opération sur les développements limités

Soit f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0 de parties régulières respectives P et Q .

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

6.2.1 Combinaison

La combinaison $\alpha f + \beta g$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière $\alpha P + \beta Q$

$$DL_n(0) \text{ de } f(x) = 2e^x - 3\ln(1+x) ;$$

$$f(x) = 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - 3\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3)$$

$$f(x) = 2 - x + \frac{5x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

Remarque 18

Par identification, on retrouve les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ par la formule de Taylor-Young :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = -1 \\ \frac{f''(0)}{2} = \frac{5}{2} \\ \frac{f^{(3)}(0)}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = -1 \\ f''(0) = 5 \\ f^{(3)}(0) = -4 \end{cases}$$

6.2.2 Produit

Le produit fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière le produit PQ en ne gardant que les puissances inférieures ou égales à n .

Exemple 37

$$DL_3(0)$$

$$f(x) = e^x \ln(1+x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3)$$

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

6.2.3 Le quotient

Si $Q(0) \neq 0$ alors le quotient $\frac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière obtenue par la division suivant les puissances croissantes de x à l'ordre n de $\frac{P}{Q}$ (P par Q)

Exemple 38

$$DL_3(0), f(x) = \frac{e^x \ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$$

$$e^x \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

Division suivant les puissances croissantes de x à l'ordre 3 :

6.2.4 Composition

Si f et g admettent des d.l. d'ordre n au voisinage 0 de parties régulières respectives P et Q et si la valuation de Q est nulle (i.e $Q(0) = 0$) alors $f \circ g$ admet un d.l. d'ordre n dont la partie régulière est obtenue en tronquant au degré n le polynôme $P \circ Q$.

Exemple 39

$$DL_3(0) \text{ d'ordre 3 au voisinage de 0 de } f(x) = sh[\ln(1+x)]$$

6.2.5 Intégration

Si f est dérivable dans un voisinage de 0 et si f' admet un d.l. d'ordre n au voisinage de 0

$$f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

alors f admet un d.l. d'ordre $n+1$ au voisinage de 0 obtenu par intégration terme à terme :

$$f(x) = f(0) + a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exemple 40

1. d'ordre 5 au voisinage de 0 de $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Trouvons d'abord le développement limité à l'ordre 4 de la dérivée $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

$$DL_4(0) \quad f'(x) = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

Par intégration on a :

$$f(x) = f(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \text{ or } f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4};$$

$$DL_5(0) \quad f(x) = \frac{\pi}{4} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

6.3 Applications

6.3.1 Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \cdot \sin^2(x)}$$

$$DL_4(0) : \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \Rightarrow \sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^4)$$

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + o(x^4)}{x^2 \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \left(\frac{1}{3} + o(1)\right)}{x^4 (1 + o(1))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)}{(1 + o(1))}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3}$$

* calcul de la limite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{x^2}$

DL2(0) : $\ln(1+y^2) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ avec $y^2 = 2x^2$: on a $\ln(1+2x^2) = 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 2x^4 + o(x^4)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 2x^2 + o(x^2))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{x^2} = 2$$

6.3.2 Tangente

Soit $DL_n(0)$: $f(x) = a_0 + a_1x + a_px^p + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ où a_p est le premier coefficient d'ordre $p \geq 2$ non nul.

La droite $(T) : y = a_0 + a_1x$ représente la tangente à C_f en 0.

* La position relative de cette tangente et de la courbe C_f est déterminée par le signe du monôme a_px^p

Exemple 41

$$DL_3(0) : f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^3 + o(x^3)$$

L'équation de la tangente en $x = 0$ $(T) : y = 1 - \frac{1}{2}x$.

La position de (T) et C_f au voisinage de 0 :

Signe de $-\frac{3}{4}x^3$;

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\frac{3}{4}x^3$		+	-

* $\forall x < 0$ on a : $-\frac{3}{4}x^3 > 0 \Rightarrow (C_f)/(T)$

* $\forall x > 0$ on a : $-\frac{3}{4}x^3 < 0 \Rightarrow (T)/(C_f)$

6.3.3 Asymptote oblique

Si f admet un développement limité au voisinage de ∞ de la forme : $f(x) = ax + b + \frac{c_p}{x^p} + o(\frac{1}{x^p})$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f à l'infini (∞). Dans la pratique on pose :

$t = \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow \infty$; $t \rightarrow 0$.

On cherche $DL_n(0)$: $tf(\frac{1}{t}) = a + bt + c_pt^p + o(t^{p+1})$

Exercice d'application 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} \frac{x}{1-e^x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x}{\ln(1-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer un prolongement par continuité en 0 noté g que l'on précisera.
3. Étudier la dérivabilité de g en 0
4. Déterminer $DL_2(0)$ de g .

Exercice d'application 2

5. En déduire que g admet une tangente (T) en 0.
6. Étudier la position relative de cette tangente avec la courbe représentative de g au voisinage de 0.

Solution 8

1. Domaine de définition :

$$D_f = \{ \forall x \in \mathbb{R} / (1 - e^x) \neq 0; \quad (1 - x) > 0 \text{ et } \ln(1 - x) \neq 0 \}$$

$$1 - e^x \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

$$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1 \text{ or } x < 0$$

$$\ln(1 - x) \neq 0 \Rightarrow 1 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

$$D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

2. $0 \in D_f$

* Cherchons la limite de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{1}{-e^x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{x}{\ln(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{1}{\frac{-1}{1-x}} = -1$$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \text{ donc : } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. Dérivabilité de g en 0 :

*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{\frac{x}{\ln(1-x)} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{x + \ln(1-x)}{x \ln(1-x)} \\ &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{x}{1-e^x} + 1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Comme : } \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{2} \text{ alors } g \text{ est dérivable en 0.}$$

Solution 94) $\Delta L_2(0)$

$$\bullet x > 0, g(x) = \frac{x}{1 - e^x} = \frac{x}{1 - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 0(x^3))} = \frac{-1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + 0(x^2)}$$

pour $x > 0, g(x) = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + 0(x^2)$

• $x < 0$

$$g(x) = \frac{x}{\ln(1-x)} = \frac{x}{-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 0(x^3)} = \frac{-1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + 0(x^2)}$$

Pour $x < 0, g(x) = -1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + 0(x^2)$

$$g(x) = \begin{cases} -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + 0(x^2), & x > 0 \\ -1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + 0(x^2), & x < 0 \end{cases}$$

5) Tangente de g en 0 :

$$(T) : y = -1 + \frac{x}{2}$$

6) • Pour $x > 0, -\frac{1}{12}x^2 < 0 \Rightarrow (T) / \mathcal{C}f$

• Pour $x < 0, \frac{1}{12}x^2 > 0 \Rightarrow \mathcal{C}f / (T)$

